Introduction aux probabilités - TD 2

Université Paris Sciences et Lettres
CPES2 Mathématiques & Physique

Exercice 1 (Urne de Pólya — loi uniforme des nombres de boules rouges)

À l'instant 0, une urne contient une boule rouge et une boule verte et on effectue une succession de tirages définie par la règle suivante : on tire une boule de l'urne au hasard et on la remet dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur (on dispose en réserve d'une infinité de boules rouges et vertes). On note S_n le nombre de boules rouges au temps $n \geq 0$. Montrer que pour tout $n \geq 0$ et tout $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ on a

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 2 (Fonction de répartition de lois discrètes usuelles)

On se propose de déterminer la fonction de répartition $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ pour diverses lois discrètes.

1. Loi uniforme sur un ensemble fini $X(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$.
2. Loi de Bernoulli $\mathrm{Ber}(p)$, avec $p \in [0, 1]$.
3. Loi binomiale $\mathrm{Bin}(4, \frac{1}{2})$.
4. Loi géométrique $\mathrm{G}(p)$, avec $p \in (0, 1]$.

Exercice 3 (Fonction de répartition de lois à densité usuelles)

Calculer la fonction de répartition $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ pour les lois continues suivantes.

1. Loi uniforme sur $[a, b]$ avec $a < b$, notée $\mathscr{U}([a, b])$.
2. Loi exponentielle de paramètre $\varepsilon > 0$, notée $\mathscr{E}(\varepsilon)$.
3. Loi de Cauchy centrée de paramètre d'échelle $\varepsilon > 0$, dont la densité est donnée par $f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$ pour x réel. Elle est notée $\mathscr{C}(\varepsilon)$ (densité de Cauchy centrée en 0 et d'échelle ε).

Exercice 4 (Comparaison de probabilités pour une loi normale centrée réduite)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0, 1)$. Classer dans l'ordre croissant les quantités suivantes :

$$\mathbf{P}(X \in [-4, -3]), \quad \mathbf{P}(X \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]), \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X \in [1, 2]).$$

Exercice 5 (Simulation d'une loi sur un ensemble dénombrable)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble au plus dénombrable E.

1. On suppose d'abord que E est fini : $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$ et, pour tout entier k, $1 \leq k \leq N$, on pose $p_k = \mathbf{P}(X = e_k) > 0$. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et définissons la variable Y à valeurs dans E par

$$Y = e_k \quad \text{dès que} \quad U \in \left] \sum_{l=0}^{k-1} p_l, \ \sum_{l=0}^{k} p_l \right],$$

avec la convention $p_0 = 0$.

2. En déduire une méthode de simulation de X à partir d'un tirage d'une variable uniforme sur $[0, 1]$ lorsque E est dénombrable.

Exercice 6 (Espérance et variance de lois usuelles)

Soit X une variable aléatoire réelle de loi μ. Justifier que l'espérance et la variance de X sont bien définies dans les cas suivant puis les calculer:

- $\mu = \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$.
- $\mu = \mathcal{E}(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
- $\mu = \mathcal{P}(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
- $\mu = \mathcal{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$, où $\mathcal{B}(n,p)$ est la loi binomiale de paramètres (n,p).
- $\mu = \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1]$, où $\mathcal{G}(p)$ est la loi géométrique de paramètre p donnée par:

$$\mathcal{G}(p) := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} p(1-p)^{n-1}\delta_n$$

Exercice 7 (Lois à absence de mémoire)

Soit X une variable aléatoire réelle positive de loi μ. On dit que μ est à absence de mémoire si $\mathbf{P}(X > t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et, pour tous $t, s \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathbf{P}(X > t + s | X > s) = \mathbf{P}(X > t)$$

1. Montrer que $\mathcal{E}(\alpha)$ est à absence de mémoire pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $S(t) = \mathbf{P}(X > t)$. Montrer que $S(t + s) = S(t)S(s)$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$.

3. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que, pour $q \in \mathbb{Q}_+$, $S(qt) = S(t)^q$.

4. Montrer que, pour $r \in \mathbb{R}_+$, $S(rt) = S(t)^r$.

5. En déduire que $\mu = \mathcal{E}(\alpha)$ pour un réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ dont on donnera la valeur en fonction de S.

Exercice 8 (Espérance conditionnelle à un évènement)

Soient X une variable aléatoire réelle positive ou intégrable sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbf{P}(A) > 0$. On définit l'espérance conditionelle de X par rapport à A, notée $\mathbf{E}[X|A]$, comme la valeur suivante:

$$\mathbf{E}[X|A] := \frac{\mathbf{E}[\mathbb{1}_A X]}{\mathbf{P}(A)} \in \bar{\mathbb{R}}_+$$

1. Soit $\mathbf{P}_A$ la probabilité $\mathbf{P}$ conditionnée à A et $\mathbf{E}_A$ l'espérance qui lui est associée. Montrer que:

$$\mathbf{E}_A[X] = \mathbf{E}[X|A]$$

On pourra commencer par montrer l'égalité pour $X = \mathbb{1}_B$ avec $B \in \mathcal{A}$.

2. On suppose qu'il existe $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ tel que $A = \{X \in B\}$. Soient μ la loi de X et μ_B la probabilité μ conditionnée à B. Montrer que:

$$\mathbf{E}[X|A] = \int_{\mathbb{R}} x\mu_B(dx)$$

3. Soit $(B_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements non négligeables (au plus) dénombrable. Montrer que:

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i\in I} \mathbf{P}(B_i)\mathbf{E}[X|B_i]$$

4. Calculer $\mathbf{E}[X|A]$ dans les cas suivants:

- $\mu = \mathcal{U}([a,b])$ et $A := \{X \in [c,d]\}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a < c < d < b$.
- $\mu = \mathcal{E}(\alpha)$ et $A := \{X > t\}$, avec $\alpha, t \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9 (Loi de l'arcsinus)

Soit X une variable aléatoire à densité dont la densité est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{c}{\sqrt{x(1-x)}}\mathbf{1}_{(0,1)}(x).$$

1. Déterminer la valeur de la constante c. (Pensez à poser $x = \sin^2 u$, avec $u \in (0, \frac{\pi}{2})$.)
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. Quelle est la loi de $Y := \arcsin\left(\sqrt{X}\right)$?

Exercice 10 (Loi exponentielle transformée)

Soit X une variable aléatoire à densité dont la densité est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x), \quad \lambda > 0.$$

On définit la variable aléatoire

$$Y := \sqrt{X}.$$

1. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
2. En utilisant la méthode de fonction test, déterminer la densité f_Y de Y.
3. Identifier la loi de Y.

Exercice 11 (Estimation de la proportion de pièces défectueuses)

Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue $p \in [0,1]$ est défectueuse. Pour estimer p on effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que la population est très grande, de sorte que le prélèvement s'apparente à n tirages indépendants avec remise. On note X_n le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon de taille n. On se propose de quantifier le fait que X_n/n approche p.

1. Quelle est la loi de X_n ? Quelle est sa moyenne ? Quelle est sa variance ?
2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\mathbf{P}\left(\left|\, \tfrac{X_n}{n} - p \,\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4\,n\varepsilon^2}.$$
3. En déduire une condition sur n pour que X_n/n soit un estimateur de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Exercice 12 (Distribution gamma)

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, justifier que l'intégrale suivante est bien définie et finie:

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} t^{x-1}e^{-t}\lambda(dt)$$

On définit la fonction Γ d'Euler de la sorte:

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \int_{\mathbb{R}_+^*} t^{x-1}e^{-t}\lambda(dt) \end{aligned}$$

2. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

4. Soient $C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. On définit la mesure $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ comme celle admettant la densité suivante par rapport à Lebesgue:

$$t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)Ct^{\alpha-1}e^{-\beta t}$$

Montrer que $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ est une mesure finie puis déterminer C pour que $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ soit une probabilité.

On suppose que C est tel que $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ est une probabilité.

5. Pour quelle valeur de α a-t-on $\mathcal{G}(\alpha, \beta) = \mathcal{E}(\beta)$?

6. Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$. Après avoir justifié leur existence, calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 13 (Inégalité de Jensen)

Soient $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe mesurable et X une variable aléatoire réelle. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ax + b = \varphi(x)$ et $at + b \leq \varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. On suppose que $\varphi \circ X$ est intégrable. Montrer l'inégalité suivante:

$$\varphi(\mathbf{E}[X]) \leq \mathbf{E}[\varphi(X)]$$