Introduction aux probabilités - TD 3

Université Paris Sciences et Lettres
CPES2 Mathématiques & Physique

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, chacune de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Déterminer la loi de $Z = \max(X,Y)$ et celle de $T = \min(X,Y)$.

2. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

3. Déterminer la covariance du couple (Z,T).

4. Déterminer la loi du couple (Z,T).

Exercice 2

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité

$$f(x,y) = e^{-y}\,\mathbf{1}_{\{0<x<y\}}, \qquad x,y \in \mathbb{R}.$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

2. Calculer les lois marginales de X et Y. Sont-elles indépendantes ?

3. Calculer $P\big(X \leq 1 \mid Y > 2\big)$.

Exercice 3 (Loi normale)

On considère l'intégrale suivante, dite "de Gauss" :

$$I := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \lambda(dx)$$

1. Justifier que I est bien définie et finie.

2. En remarquant que l'intégrande est pair et en effectuant un changement de variable, montrer que :

$$I^2 = 4 \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x^2(1+s^2)} x \lambda(ds)\lambda(dx)$$

3. En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, montrer que :

$$I^2 = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+s^2} \lambda(ds)$$

4. En déduire que $I = \sqrt{\pi}$.

Soit $C \in \mathbb{R}$. On considère la mesure $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, admettant la densité suivante :

$$x \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

5. Après avoir montré que $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ est une mesure finie, déterminer C pour que $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ soit une probabilité.

On suppose que C est tel que $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ est une probabilité. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

6. Après avoir justifié leur existence, calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 4 (Une fonction non intégrable)

Après avoir justifié sa mesurabilité, montrer que la fonction suivante n'est pas intégrable par Lebesgue :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \mathbb{1}_{]0,1[^2}(x, y) \end{aligned}$$

On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde en s'appuyant sur le théorème de Fubini-Tonelli (indice: commencer par dériver $y \mapsto \frac{y}{(x^2+y^2)}$ par rapport à y).

Exercice 5 (Loi de Poisson)

Un bureau d'études veut mener une enquête sur la consommation de tabac dans certains lieux publics. Dans un premier temps on répartit la population en fumeurs et non fumeurs, en supposant que $p := 60\%$ des personnes ne fument jamais. On suppose par ailleurs que le nombre de personnes qui entrent dans l'un des lieux publics considérés pendant une heure suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha = 20$. On suppose aussi que ces personnes sont fumeurs ou non-fumeurs indépendamment les unes des autres et indépendamment du nombre de personnes entrées.

1. Quelle est la loi jointe des nombres de fumeurs et de non fumeurs qui entrent dans l'un des lieux publics considérés pendant une heure ?

2. Quelle est la loi marginale du nombre de fumeurs ?

3. Le nombre de fumeurs est-il indépendant du nombre de non fumeurs ?

4. Répondre aux mêmes questions dans le cas où le nombre de personnes fréquentant ces lieux n'est plus une variable aléatoire mais un entier strictement positif fixé à l'avance.

Exercice 6

Calculer les fonctions caractéristiques des lois suivantes.

1. Loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$.

2. Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

3. Loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0, 1)$.

4. Loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$.

Exercice 7 (Bernoullis imbriquées)

Soient $p, q \in]0, 1[$ avec $p < q$.

1. Supposons l'existence d'un vecteur aléatoire (X, Y) tel que $X \sim \mathcal{B}(p)$, $Y \sim \mathcal{B}(q)$ et $\mathbf{P}(X \leq Y) = 1$. Déterminer la loi conjointe de (X,Y) sous forme de tableau.

2. Construire un tel vecteur aléatoire (i.e. définir un espace probabilisé et un vecteur aléatoire sur cette espace respectant les contraintes ci-dessus)

Exercice 8

Calculer la loi de la somme $S = X + Y$ lorsque X et Y sont indépendantes, dans les cas suivants.

1. $X \sim \text{Exp}(\alpha)$ et $Y \sim \text{Exp}(\alpha)$, $\alpha > 0$. Utiliser la méthode de la fonction de répartition.

2. $X \sim \mathscr{P}(\alpha)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\lambda)$ indépendantes. Calculer $P(X + Y = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (justifier que $X + Y \in \mathbb{N}$ presque sûrement).

3. $X \sim \mathscr{U}([0,1])$ et $Y \sim \mathscr{U}([0,1])$ indépendantes. Trouver la loi de $S = X + Y$ en utilisant la méthode de la fonction test, c'est à dire en calculant $\mathbb{E}[\varphi(X+Y)]$ pour une fonction test φ.

4. $X \sim \mathscr{N}(\mu, 1)$ et $Y \sim \mathscr{N}(\nu, 1)$ indépendantes. Utiliser la fonction caractéristique. Vous pouvez suivre les étapes suivantes.

- Soit Z une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que, pour $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$, $\sigma Z + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

- En déduire que, pour $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction caractéristique φ_X d'une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est donnée, pour $t \in \mathbb{R}$, par:

$$\varphi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t^2}$$

  Rappel : si $W \sim \mathscr{N}(0,1)$ alors sa fonction caractéristique est

$$\varphi_W(t) = \mathbb{E}\big[e^{itW}\big] = \exp\big(-\tfrac{1}{2}t^2\big).$$

- Répondre à la question initiale.

.

Exercice 9 (Loi d'un quotient)

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi admet la densité suivante:

$$(x, y) \mapsto \mathbb{1}_{(\mathbb{R}_+^*)^2}(x, y) e^{-(x+y)}$$

1. Déterminer les lois marginales du couple.

2. X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Soit $Z \coloneqq X/Y$. Après avoir justifié que Z est une variable aléatoire réelle, déterminer sa fonction de répartition.

Exercice 10 (Loi du maximum)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, μ une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ de fonction de répartition F et $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire de loi $\mu^{\otimes n}$. On pose $M \coloneqq \max_{i \in [\![n]\!]} X_i$.

1. Après avoir justifié que M est une variable aléatoire réelle, donner sa fonction de répartition en fonction de F.

Pour $\alpha, s \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{R}$, on appelle loi de Fréchet de forme α, d'échelle s et de position m, notée $\mathcal{F}(\alpha, s, m)$, la loi sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ admettant la densité suivante:

$$x \mapsto \mathbb{1}_{]m,+\infty[}(x) \frac{\alpha}{s} \left(\frac{x-m}{s} \right)^{-1-\alpha} e^{-\left(\frac{x-m}{s}\right)^{-\alpha}}$$

Soient $\alpha, s \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{R}$. On suppose que $\mu = \mathcal{F}(\alpha, s, m)$.

2. Montrer que M a pour loi $\mathcal{F}(\alpha, n^{\frac{1}{\alpha}} s, m)$ (indice: dériver $x \mapsto e^{-\left(\frac{x-m}{s}\right)^{-\alpha}}$).

Exercice 11 (Vecteurs gaussiens)

On s'intéresse aux vecteurs aléatoires dits gaussiens.

1. Soit Z une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que, pour $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$, $\sigma Z + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

2. En déduire que, pour $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction caractéristique φ_X d'une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est donnée, pour $t \in \mathbb{R}$, par:

$$\varphi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t^2}$$

3. Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire de coordonnées indépendantes tel que, pour $k \in [\![n]\!]$, X_k a loi $\mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$ avec $\mu_k, \sigma_k \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{k=1}^n \alpha_k X_k$ a pour loi $\mathcal{N}\big(\sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_k, \sum_{k=1}^n (\alpha_k \sigma_k)^2\big)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'un vecteur aléatoire $X := (X_1, \dots, X_n)$ est gaussien si toute combinaison linéaire de ses coordonnées est une gaussienne (potentiellement dégénérée, i.e. du type $\mathcal{N}(\mu, 0) := \delta_\mu$).

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X := (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire gaussien. Montrer que les coordonnées de X sont gaussiennes. En particulier, X admet une matrice de dispersion.

5. Montrer qu'un vecteur aléatoire dont les coordonnéess sont gaussiennes n'est pas nécessairement gaussien.

6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X un vecteur aléatoire gaussien d'espérance $\mu \in \mathbb{R}^n$ et de matrice de dispersion D. Montrer que la fonction caractéristique φ_X de X est donnée, pour $t \in \mathbb{R}^n$, par:

$$\varphi_X(t) = e^{i\mu^* t - \frac{1}{2} t^* D t}$$

En particulier, la loi d'un vecteur aléatoire gaussien est déterminée par son espérance et sa matrice de dispersion.

7. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire gaussien. De la question précédente, déduire que, pour $i, j \in [\![n]\!]$, X_i est indépendante de X_j si et seulement si $Cov(X_i, X_j) = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{N}(\mu, D)$ la loi d'un vecteur aléatoire gaussien $(X_1, \dots, X_n)$ d'espérance $\mu \in \mathbb{R}^n$ et de matrice de dispersion D.

8. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, $X := (X_1, \dots, X_n)$ et $Y := (Y_1, \dots, Y_m)$ deux vecteurs aléatoires gaussiens indépendants d'espérances $\mu_X \in \mathbb{R}^n$ et $\mu_Y \in \mathbb{R}^m$ et de matrices de dispersions D_X et D_Y (respectivement) et $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Montrer que $AX + Y \sim \mathcal{N}(A\mu_X + \mu_Y, AD_XA^* + D_Y)$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z := (Z_1, \dots, Z_n)$ un vecteur aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)^{\otimes n}$.

9. Montrer que Z est un vecteur aléatoire gaussien.

10. Soit D une matrice réelle de taille $n \times n$ symétrique semi-définie positive et $\mu \in \mathbb{R}^n$. En déduire qu'il existe un vecteur aléatoire gaussien d'espérance μ et de matrice de dispersion D, c'est-à-dire la loi $\mathcal{N}(\mu, D)$ est bien définie.