Introduction aux probabilités
Examen de mi-parcours — 1h

Questions de cours [4 points]

1. Donner la définition d'un espace probabilisé. On précisera les définitions d'une tribu et d'une mesure.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur des espaces probabilisés, **de densités continues bornées**. On suppose que pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée,

$$\mathbf{E}[h(X)] = \mathbf{E}[h(Y)]$$

montrer que les variables aléatoires X et Y ont la même loi.

Exercice 1 [6 points]

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\, \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) + \frac{1}{2}e^{x}\, \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(x).$$

Autrement dit :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Calculer la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X de densité f.

3. Montrer que $F : \mathbb{R} \to]0, 1[$ est bijective et donner son inverse G.

4. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$, c'est-à-dire admettant la densité $h(u) = \mathbf{1}_{]0,1[}(u)$. Montrer que $G(U)$ a même loi que X.

Exercice 2 [10 points]

On définit la fonction Γ d'Euler de la sorte:

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \int_{\mathbb{R}_+^*} t^{x-1}e^{-t}\lambda(dt) \end{aligned}$$

1. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On considère l'intégrale suivante:

$$I := \int_{]0,1[} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\lambda(dx)$$

Montrer que I est bien définie et finie.

3. On admet que :

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-t} \int_{]0,t[} x^{a-1}(t-x)^{b-1}\lambda(dx)\lambda(dt).$$

En déduire:

$$I = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Soit $C \in \mathbb{R}$. On considère la loi Beta $Beta(a,b)$ de paramètres (a,b) sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ comme admettant la densité suivante :

$$x \mapsto C\mathbb{1}_{]0,1[}(x)x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

4. Déterminer C pour que $Beta(a,b)$ soit une densité de probabilité.

On suppose que C est tel que $Beta(a,b)$ est une probabilité. Soit X une variable aléatoire de loi $Beta(a,b)$.

5. Après avoir justifié leur existence, calculer l'espérance et la variance de X.

6. Soit $Y = 1 - X$. Quelle est la loi de Y ?

Exercice 3 [4 points]

Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance $m \in \mathbb{R}$ et de variance nulle. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$E_n := \{|X - m| > 1/n\}$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(E_n) = 0$.

2. En déduire que $X = m$ presque sûrement.