Introduction aux probabilités
Examen de mi-parcours — 1h
Version corrigée

Université Paris Sciences et Lettres
CPES2 Mathématiques & Physique

Questions de cours [4 points]

1. Donner la définition d'un espace probabilisé. On précisera les définitions d'une tribu et d'une mesure.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur des espaces probabilisés, **de densités continues bornées**. On suppose que pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée,

$$\mathbf{E}[h(X)] = \mathbf{E}[h(Y)]$$

montrer que les variables aléatoires X et Y ont la même loi.

Exercice 1 [6 points]

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\,\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) + \frac{1}{2}e^{x}\,\mathbf{1}_{]-\infty,0[}(x).$$

Autrement dit :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
Pour que f soit une densité, il faut que $f(x) \geq 0$ pour tout x et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

On a clairement $f(x) \geq 0$ pour tout x. Calculons l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(1) = 1.$$

Donc f est bien une densité de probabilité.

2. Calculer la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X de densité f.
Pour $x < 0$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{t}\,dt = \frac{1}{2}e^{x}.$$

Pour $x \geq 0$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{t}\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-t}\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - e^{-x}) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Ainsi,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & \text{si } x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

3. Montrer que $F : \mathbb{R} \to]0,1[$ est bijective et donner son inverse G.

La fonction F est continue, strictement croissante, et vérifie :

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

Donc F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

Cherchons sa fonction réciproque $G = F^{-1}$.

- Si $u < \frac{1}{2}$, alors $u = \frac{1}{2}e^{x}$, donc $x = \ln(2u)$. - Si $u \geq \frac{1}{2}$, alors $u = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$, donc $x = -\ln\big(2(1-u)\big)$.

Ainsi :

$$G(u) = \begin{cases} \ln(2u), & \text{si } 0 < u < \frac{1}{2}, \\ -\ln\big(2(1-u)\big), & \text{si } \frac{1}{2} \leq u < 1. \end{cases}$$

4. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$, c'est-à-dire admettant la densité $h(u) = \mathbf{1}_{]0,1[}(u)$. Montrer que $G(U)$ a même loi que X.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(G(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x).$$

La première inégalité vient de la stricte croissance de F et la seconde du fait que U est uniforme sur $]0,1[$. Ainsi, la fonction de répartition de $G(U)$ est bien F, donc $G(U)$ et X ont la même loi, car ils ont la même fonction de répartition.

Exercice 2 [10 points]

On définit la fonction Γ d'Euler de la sorte:

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \int_{\mathbb{R}_+^*} t^{x-1}e^{-t}\lambda(dt) \end{aligned}$$

1. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a:

$$x\Gamma(x) = x\int_{\mathbb{R}_+^*} t^{x-1}e^{-t}\lambda(dt) = \int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t}dt$$

En effectuant une intégration par partie, on obtient:

$$x\Gamma(x) = [-t^x e^{-t}]_{t=0}^{t\to+\infty} + \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = 0 + \int_{\mathbb{R}_+^*} t^x e^{-t}\lambda(dt) = \Gamma(x+1)$$

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On considère l'intégrale suivante:

$$I := \int_{]0,1[} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\lambda(dx)$$

Montrer que I est bien définie et finie.

L'intégrande continue par morceaux donc mesurable. De plus, elle est positive, donc son intégrale I est bien définie. Pour $x \in]0,1/2[$, $(1-x)^{b-1} \leq C_b \max\{(1/2)^{b-1}, 1\}$ et, pour $x \in [1/2,1[$, $x^{a-1} \leq C^a \max\{(1/2)^{a-1}, 1\}$. Donc, par la relation de Chasles:

$$I = \int_{]0,1/2[} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\lambda(dx) + \int_{[1/2,1[} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\lambda(dx) \leq C_b\int_{]0,1/2[} x^{a-1}\lambda(dx) + C^a\int_{[1/2,1[} (1-x)^{b-1}\lambda(dx)$$

En effectuant le changement de variable $y = (1-x)$, on obtient:

$$I \leq \frac{C_b}{a2^a} + \int_{]0,1/2]} y^{b-1}\lambda(dy) = \frac{C_b}{a2^a} + \frac{C^a}{b2^b} < +\infty$$

3. On admet que :

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-t}\int_{]0,t[} x^{a-1}(t-x)^{b-1}\lambda(dx)\lambda(dt).$$

En déduire:

$$I = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

En effectuant le changement de variable $s = x/t$ dans l'intégrale, on obtient:

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-t} t^{a+b-1} \int_{]0,1[} s^{a-1}(1-s)^{b-1}\lambda(ds)\lambda(dt) = \Gamma(a+b)I$$

On en déduit que:

$$I = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Soit $C \in \mathbb{R}$. On considère la loi Beta $Beta(a,b)$ de paramètres (a,b) sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ comme admettant la densité suivante :

$$x \mapsto C\mathbb{1}_{]0,1[}(x)x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

4. Déterminer C pour que $Beta(a,b)$ soit une densité de probabilité.

On suppose que C est tel que $Beta(a,b)$ est une probabilité. Soit X une variable aléatoire de loi $Beta(a,b)$.

5. Après avoir justifié leur existence, calculer l'espérance et la variance de X.

X est positive et bornée donc son espérance est bien définie et finie. Sa variance est donc également bien définie. Par le théorème de transfert, on a:

$$\mathbf{E}[X] = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{]0,1[} x^a(1-x)^{b-1}\lambda(dx) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} = \frac{a}{a+b}$$

où la dernière égalité est car $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. De même:

$$\mathbf{E}[X^2] = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{]0,1[} x^{a+1}(1-x)^{b-1}\lambda(dx) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a+2)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+2)} = \frac{(a+1)a}{(a+b+1)(a+b)}$$

On en déduit:

$$Var(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{(a+1)a}{(a+b+1)(a+b)} - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$$

6. Soit $Y = 1 - X$. Quelle est la loi de Y ?

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Par le théorème de transfert, on a:

$$\mathbf{E}[f(Y)] = \mathbf{E}[f(1-X)] = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{]0,1[} f(1-x)x^{a-1}(1-x)^{b-1}\lambda(dx)$$

En effectuant le changement de variable $y = 1 - x$, on obtient:

$$\mathbf{E}[f(Y)] = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{]0,1[} f(y)(1-y)^{a-1}y^{b-1}\lambda(dy)$$

On observe que la loi $\mathbf{P}_Y$ de Y admet la densité suivante:

$$y \to \mathbb{1}_{]0,1[}(y)\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}y^{b-1}(1-y)^{a-1}$$

C'est-à-dire, $\mathbf{P}_Y = Beta(b,a)$.

Exercice 3 [4 points]

Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance $m \in \mathbb{R}$ et de variance nulle. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$E_n := \{|X - m| > 1/n\}$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(E_n) = 0$.

On sait que $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big[(X-m)^2\big] = 0$.

D'après l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(|X - m| > 1/n) \leq n^2\,\mathbb{E}\big[(X-m)^2\big] = n^2\,\mathrm{Var}(X).$$

Or, comme $\mathrm{Var}(X) = 0$, on en déduit :

$$\mathbb{P}(|X - m| > 1/n) = 0.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(E_n) = 0$.

2. En déduire que $X = m$ presque sûrement.

On considère l'ensemble

$$E = \bigcup_{n\geq 1} E_n = \bigcup_{n\geq 1} \{|X - m| > 1/n\} = \{|X - m| > 0\} = \{X \neq m\}.$$

D'après la sous-additivité de la probabilité (ou la continuité croissante),

$$\mathbb{P}(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) = 0.$$

On obtient donc $\mathbb{P}(X \neq m) = 0$, c'est-à-dire que

$$X = m \text{ presque sûrement.}$$