Analyse 3 Partiel

Durée 2h

3 février 2020

<u>Exercice 1</u> (5 points)

1. Convergence ou non de la série de terme général :

   (a) $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ *(1 point)*

   (b) $e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *(1 point)*

   (c) $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$ *(1 point)*

2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, à l'aide d'une intégrale. *(2 point)*

<u>Exercice 2</u> (4 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive telle que la série de terme général u_n diverge.
On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. En distanguant si $\dfrac{u_n}{S_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ou non, déterminer la convergence de la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n}$. (On pourra utiliser $\ln\left(1-\dfrac{u_n}{S_n}\right)$). *(1,5 point)*

2. Soit $\alpha > 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha} = \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{S_n^\alpha}\,\mathrm{d}x \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ *(1 points)*

3. Conclure dans le cas général sur la convergence de la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ selon la valeur de $\alpha > 0$. *(1,5 point)*

<u>Exercice 3</u> (6 points)

Le but de cet exercice est de déterminer la convergence selon un réel α de la série de terme général u_n^α ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $\begin{cases} u_0 \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)\end{cases}$

Nous aurons besoin du théoreme de Césaro. On commence donc par le montrer dans une première partie. (Il sera possible d'admettre le résultat si vous n'arrivez pas à effectuer cette partie).

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de limite $l \in \mathbb{R}$. Le théoreme de Césaro énonce que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = l$

   (a) *(1 point)* Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que
$$\forall n \geq n_0, \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(u_k - l)\right| \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n_0}(u_k - l)\right| + \frac{(n-n_0)\varepsilon}{2n}$$

   (b) Conclure. *(1 point)*

2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. *(1 point)*
3. Trouver un deux réels β et l, l non nul tels que $u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta} \sim l$ (l ne dépend pas de u_n). *(1 point)*
4. En déduire que $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$. (Utiliser le théoreme de Césaro). *(1 point)*
5. Conclure. *(1 point)*

<u>Exercice 4</u> (7 points)

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'entiers relatifs ne tendant pas vers 0.

   (a) Pourquoi la série de terme général $\frac{a_n}{n!}$ converge ? *(0,5 point)*

   (b) En notant $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}, n \in \mathbb{N}$ et x sa limite, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |S_n - x| \leq \frac{\|a_n\|_\infty}{nn!}$ (on rappelle que $\|a_n\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}|a_k|$). *(1 points)*

   (c) En déduire que $(n-1)!x = N_{n-1} + \frac{a_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ou N_{n-1} est un entier à déterminer, puis que $n!x = N_n + \frac{a_{n+1}}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. *(1,5 point)*

   (d) En raisonnant par l'absurde, conclure sur l'irrationalité de x. *(1 point)*

2. Application (on pourra admettre le résultat de la question 1).

   (a) Montrer que $\cos(1)$ et $\sin(1)$ sont irrationnels. *(1 point)*

   (b) En déduire que $\tan(1)$ est irrationnel. *(1 point)*

   (c) Montrer que $e = \sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{n!}$ n'est solution d'aucune équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$. On dit que e est transcendant. *(1 point)*

<u>Bonus</u> (2 points)

En utilisant $|S_{2n} - S_n|, n \in \mathbb{N}^*$ donner la nature de la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n}$, ou σ est une bijection de $\mathbb{N}^*$.